Новая тема 5

Теоретические модели, используемые при исследовании плазмы. Кинетическое уравнение

Теоретические модели описания плазмы

Полный и точный учёт всех полей и взаимодействий частиц в плазме обычно невозможен, поэтому для её описания применяют одну из упрощённых моделей.

Расчёт движения частиц

⇓

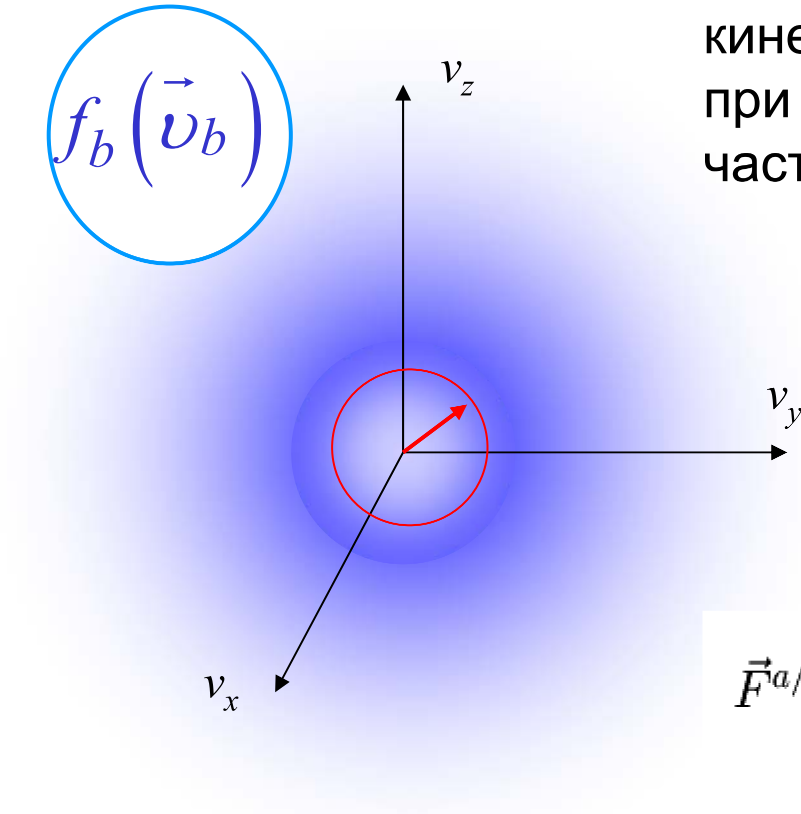
Кинетический подход (расчёт функции распределения)

⇓

Магнитная гидродинамика (расчёт макроскопических параметров)

переход к модели более высокого уровня обычно означает, что приходится пренебрегать частью физических эффектов, т.е. модели более высокого уровня ограничивают классы описываемых физических явлений!

Кинетическое уравнение с самосогласованным полем



кинетический подход <u>уже использовался</u> при выводе силы торможения пробной частицы в плазме

$$\vec{F}^{a/b} = \int d\vec{F}^a = -\frac{4\pi\Lambda\, q_a^2 q_b^2}{m_{ab}} \int f_b(\vec{v}_b)\frac{\vec{v}_a - \vec{v}_b}{|\vec{v}_a - \vec{v}_b|^3}\, d\vec{v}_b$$

$f_b\left(\vec{\upsilon}_b\right)$ - функция распределения частиц сорта b по скоростям

Функция распределения

самое полное описание плазмы

$$\boxed{f_a(\vec{r},\vec{\upsilon},t) \overset{def}{=} \frac{dN}{d\vec{r}\cdot d\vec{\upsilon}}}$$

a – сорт частиц (электроны, ионы, атомы …..)

dN – число частиц в фазовом объёме $d\vec{r}\cdot d\vec{\upsilon}, \quad dN \gg 1$

Через функцию распределения можно выразить макроскопические параметры:

плотность частиц: $n_a(\vec{r},t) = \int f_a(\vec{r},\vec{\upsilon},t)d\vec{\upsilon}$

плотность тока: $\vec{j}_a(\vec{r},t) = q_a \int \vec{\upsilon} f_a(\vec{r},\vec{\upsilon},t)d\vec{\upsilon}$ … и т.п.

Частицы изменяют положение и скорость → функция распределения изменяется

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon} \qquad \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a} = \frac{q_a}{m_a}\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}\right]\right)$$

Самосогласованное и случайное поле

в уравнении поля можно разбить на две составляющие:

$$\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \vec{E}_{сл} \qquad \vec{B} = \langle \vec{B} \rangle + \vec{B}_{сл}$$

- получается усреднением по объёму с большим числом частиц (**самосогласованное поле**) $\Rightarrow$ плавное изменение скорости

- случайное поле, создаваемое отдельными частицами $\Rightarrow$ изменение скорости скачком (**столкновения**)

$$\underbrace{\frac{\partial f_a}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{X}_n f_a}{\partial X_n}} + \sum_b \underbrace{St_{ab}}$$

уравнение непрерывности

в шестимерном пространстве

n = 1…6, $X = (\vec{r}, \vec{\upsilon})$

интеграл столкновений

с частицами сорта b

Кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \dot{X}_n f_a}{\partial X_n} = \frac{\partial \vec{\upsilon} f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{a} f_a}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{\partial \vec{\upsilon} f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{\upsilon}}\left(\frac{q_a}{m_a}\left(\left\langle \vec{E}\right\rangle + \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\left\langle \vec{B}\right\rangle\right]\right) f_a\right) =$$

(далее угловые скобки - знак усреднения опускаем)

$$= (\vec{\upsilon}\nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a}\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_a}{\partial \vec{\upsilon}} + \underbrace{\frac{q_a}{m_a c}\frac{\partial\left[\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right]}{\partial \vec{\upsilon}} f_a}_{=0}$$

так как $\frac{\partial}{\partial \upsilon_a}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\upsilon_\beta B_\gamma = \delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma \equiv 0$

$$\boxed{\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + (\vec{\upsilon}\nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a}\left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\times\vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_a}{\partial \vec{\upsilon}} = \sum_b St_{ab}}$$

кинетическое уравнение с самосогласованным полем

Интеграл столкновений

Физический смысл интеграла столкновений:

количество частиц, которые появляются или исчезают в единицу времени в единице шестимерного фазового пространства в результате близких столкновений с другими частицами

Столкновения происходят между частицами с почти одинаковыми координатами $\boldsymbol{r}$, они приводят к мгновенному изменению координат $\boldsymbol{v}$!!!

Некоторые модели интеграла столкновений:

• бесстолкновительное кинетическое уравнение (**уравнение Власова**)

$$St_{ab} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df_a}{dt} = 0$$ - применима теорема Лиувилля

• тау-приближение

$$St_{ab} = -\nu_{ab}(f_a - f_{a,\text{макс}}) = -\frac{f_a - f_{a,\text{макс}}}{\tau_{ab}}, \qquad \tau_{ab} = const$$

• в общем случае St_{ab} – сложная интегро-дифференциальная функция от f_a и f_b

Свойства интеграла столкновений

сохранение числа частиц

$$\int St_{ab} d\vec{\upsilon}_a = 0$$

сохранение импульса

$$\int m_a \vec{\upsilon}_a St_{ab} d\vec{\upsilon}_a + \int m_b \vec{\upsilon}_b St_{ba} d\vec{\upsilon}_b = 0$$

сохранение энергии

$$\int \frac{m_a \upsilon_a^2}{2} St_{ab} d\vec{\upsilon}_a + \int \frac{m_b \upsilon_b^2}{2} St_{ba} d\vec{\upsilon}_b = 0$$

если $St \neq 0$, то энтропия плазмы возрастает

Формула для электропроводности

Используем кинетическое уравнение

• тау-приближение, нет магнитного поля, водородная плазма → e, i

$$St_{ei} = -\nu_{ei}(f_e - f_0) = -\frac{f_e - f_0}{\tau_{ei}}, \qquad \tau_{ei} = const$$

• кинетическое уравнение для этой задачи имеет вид:

$$\frac{df_a}{dt} = \cancel{\frac{\partial f_a}{\partial t}} + \cancel{(\vec{\upsilon}\nabla) f_a} + \frac{q_a}{m_a}\left(\vec{E} + \left[\cancel{\frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}}\right]\right)\frac{\partial f_a}{\partial \vec{\upsilon}} = \sum_b St_{ab}$$

в силу стационарности

⇩

$$\frac{e\vec{E}}{m_e}\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$, где $$f_0 = n\sqrt{\frac{m}{2\pi T}}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2T}\right)$$

пусть $f = f_0 + f_1$

пренебрегаем произведением малых сомножителей $\frac{e\vec{E}}{m_e}\frac{\partial f_1}{\partial \vec{\upsilon}}$

Тогда: $$\frac{e\vec{E}}{m_e}\frac{\partial f_0}{\partial \vec{\upsilon}} = -\frac{f_1}{\tau_{ei}}$$

Формула для электропроводности (2)

Отсюда:

$$\vec{j} = -e\int \vec{\upsilon} f\left(\vec{\upsilon}\right) d\vec{\upsilon} = -e\int \vec{\upsilon} f_1\left(\vec{\upsilon}\right) d\vec{\upsilon} = e\tau_{ei} \frac{e\vec{E}}{m_e} \int f_0\left(\vec{\upsilon}\right) d\vec{\upsilon} = \frac{ne^2}{m_e} \tau_{ei} \vec{E}$$

Ранее получали:

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu} \approx \frac{T_e^{3/2}}{4\pi\Lambda e^2 \sqrt{m_e}}}$$

см. лекцию 2

Смысл приближения слабого электрического поля:

условие $f_1 << f_0$ означает, что:

$$\frac{e\vec{E}}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{\upsilon}} = -\frac{f_1}{\tau_{ei}} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \vec{\upsilon}} \sim \frac{f_0}{\upsilon_T} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{eE}{m_e} \frac{\tau_{ei}}{\upsilon_T} << 1 \quad \text{или} \quad \frac{eE\lambda_{ei}}{T_e} << 1$$

Энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега, должна быть намного меньше тепловой

Коэффициент теплопроводности

Стационарное состояние, поля отсутствуют. Одномерный случай.

$$\frac{df_a}{dt} = \cancel{\frac{\partial f_a}{\partial t}} + (\vec{\upsilon}\nabla) f_a + \frac{q_a}{m_a}\left(\cancel{\vec{E}} + \left[\cancel{\frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}}\right]\right)\frac{\partial f_a}{\partial \vec{\upsilon}} = \sum_b St_{ab}$$

- кинетическое уравнение для этой задачи имеет вид:

$$\upsilon \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_0 - f}{\tau}$$

где x - направление градиента температуры

для $\lambda \sim \upsilon\tau << L$ функцию распределения представим как $f = f_0 + f_1$

$$f_0 = n\sqrt{\frac{m}{2\pi T(x)}}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2T(x)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f_1 = -\tau\upsilon\frac{\partial f_0}{\partial x} = -n\tau\upsilon\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\left(\frac{m\upsilon^2}{2T^{5/2}} - \frac{1}{2T^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2T}\right)\frac{\partial T}{\partial x}$$

Коэффициент теплопроводности (2)

Поток тепла:

$$q = \int \upsilon \frac{m\upsilon^2}{2} f(\upsilon)\, d\upsilon = \underbrace{\int \upsilon \frac{m\upsilon^2}{2} f_0(\upsilon)\, d\upsilon}_{=0} + \int \upsilon \frac{m\upsilon^2}{2} f_1(\upsilon)\, d\upsilon$$

интегрируем: $$q = -3n\tau \frac{T}{m} \frac{\partial T}{\partial x} \equiv -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

Коэффициент теплопроводности

Точное выражение: $$\boxed{\kappa = 3.2 n \tau_{ei} \frac{T_e}{m}}$$

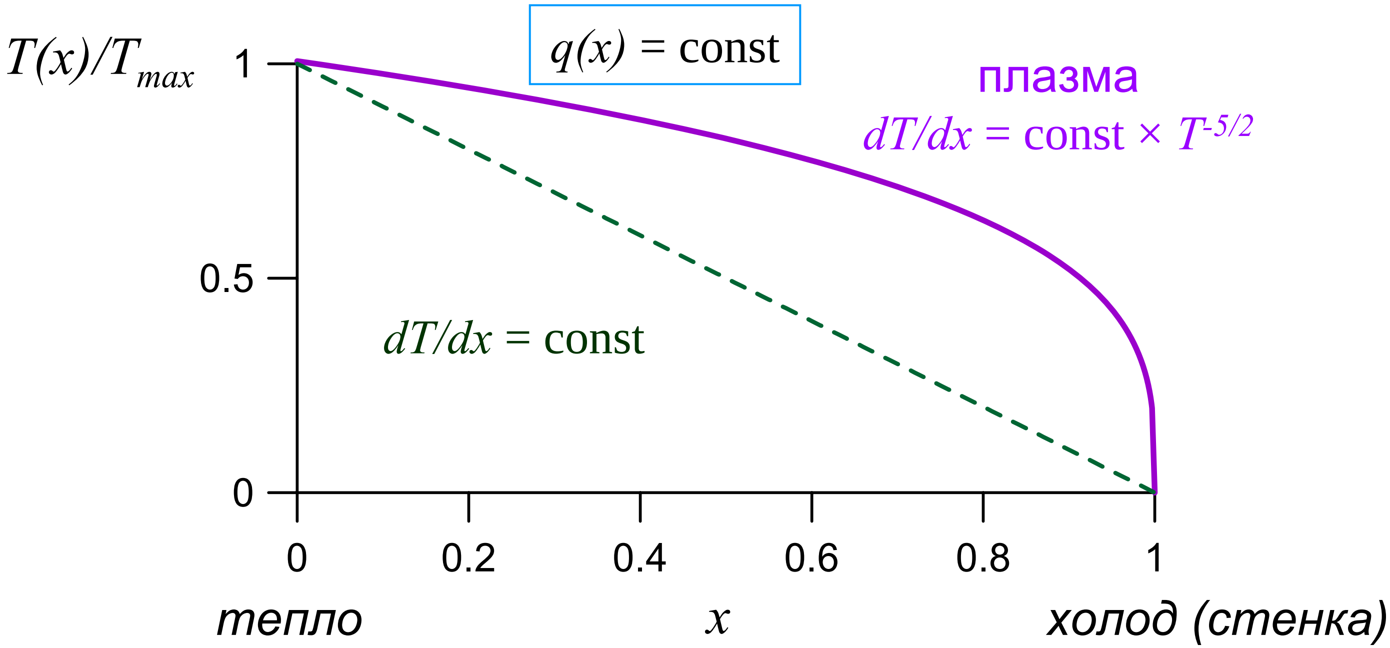
$$\tau_{ei} = \frac{3.5 \cdot 10^5}{\Lambda} \frac{T_e^{3/2}}{n}$$

Коэффициенты переноса

• ток и тепло переносятся электронами
• коэффициенты переноса не зависят от плотности

$$\boxed{\sigma \propto T_e^{3/2} \quad , \quad \kappa \propto T_e^{5/2}}$$

Сравнение переноса тепла в плазме и при постоянном κ



Комментарий по поводу закона Ома

При выводе формулы для проводимости плазмы используем кинетическое уравнение в тау-приближении

$$\frac{e\vec{E}}{m_e}\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$

Если в системе есть магнитное поле, то нужно брать

$$\frac{e}{m_e}\left(\vec{E} + \underline{\left[\frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}\right]}\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}}$$

эта скобка отвечает за появление эффекта Холла !!!

Конец темы

Теоретические модели, используемые при исследовании плазмы. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем. Функция распределения, выражение параметров плазмы через нее. Физический смысл кинетического уравнения. Коэффициенты электропроводности и теплопроводности плазмы, их зависимость от температуры (плотности).