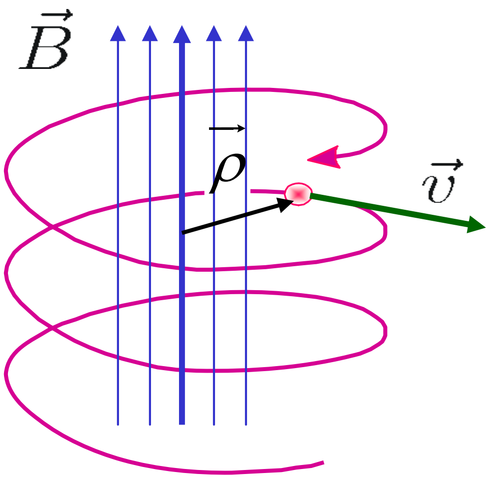
Новая тема 8

Движение частиц в магнитном поле

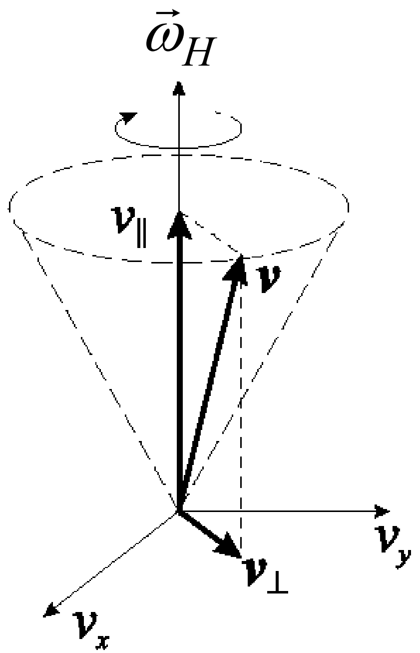
Однородное магнитное поле

Вернёмся к рассмотрению движения отдельной частицы

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{q}{c}\left[\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right]}$$



$$\boxed{\vec{\omega}_H\equiv\frac{q\vec{B}}{mc}} \Rightarrow \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\left[\vec{\upsilon}\times\vec{\omega}_H\right]$$



Вращение вектора скорости частицы происходит вокруг направления вектора $\vec{\omega}_H$

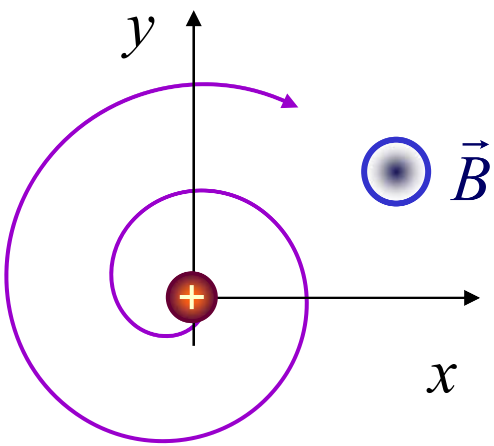
Ларморовский радиус $|\rho|=m\upsilon_\perp c/eB$

Циклотронный резонанс

Частица в электрическом и магнитном полях: $$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} + \left[\vec{\upsilon} \times \vec{\omega}_H\right]$$

Циклотронный резонанс: $$E = E_0 \sin\left(\omega_H t\right)$$

$$\boxed{\omega_H \equiv \frac{qB}{mc}}$$



Если частица находится в циркулярно-поляризованной волне с «правильной» поляризацией, то радиус спирали растет пропорционально времени. Энергия частицы растет пропорционально квадрату времени. В результате столкновений энергия вращения переходит в тепловую.

Метод нагрева плазмы:

ЭЦР $f_{ce} = 28 \cdot B$ [ГГц] ← впервые ЭЦР нагрев плазмы получен в 1971 г. на токамаке ТМ-3 (Курчатовский институт)

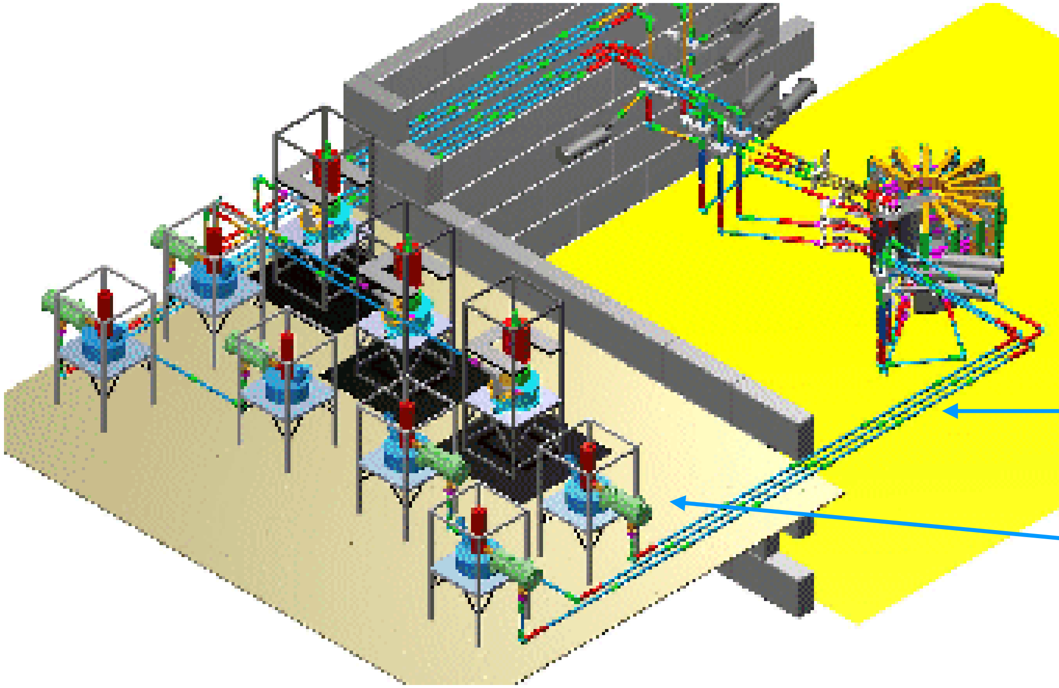
ИЦР $f_{ci} = 15 \cdot B \cdot Z/A$ [МГц]

Источники СВЧ – гиротроны ($\lambda \sim 2$ мм)

гиротрон ($P \approx 1$ МВт)

алмазное окно гиротрона

ЭЦР нагрев на токамаке TCV (Швейцария)



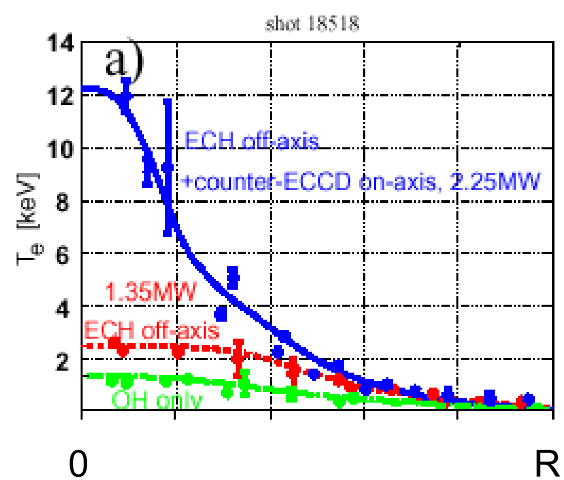
гиротронный комплекс

токамак

волноводы

гиротроны

зелёным – без СВЧ нагрева
синим – 2.25 МВт ЭЦРН



Дрейфовое приближение

Уравнения движения частицы в электрическом и магнитном полях:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}, \qquad \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} + \left[\vec{\upsilon}\times\vec{\omega}_H\right] \qquad \text{где} \quad \underbrace{\vec{\omega}_H \equiv \frac{q\vec{B}(\vec{r})}{mc}}_{}$$

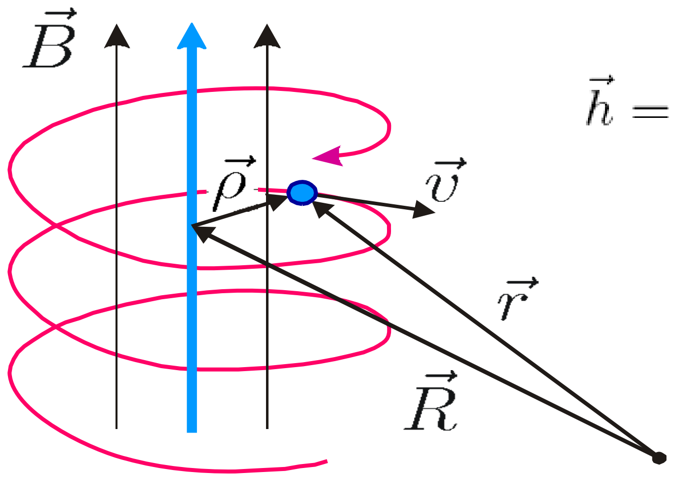
локальная циклотронная частота

если $\quad \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t} \ll \omega_H, \qquad \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} \ll \omega_H, \qquad \frac{|\nabla B|}{B} \ll \frac{\omega_H}{v}, \qquad \frac{|\nabla E|}{E} \ll \frac{\omega_H}{v}$

то частица движется почти по окружности и можно пользоваться дрейфовым приближением (отслеживается только траектория ларморовского центра)

Координаты центра:

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{\omega_H}\left[\vec{\upsilon}\times\vec{h}\left(\vec{r}\right)\right]$$



$$\vec{h} = \frac{\vec{B}}{B}$$

Метод получения дрейфовых уравнений

$$\vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} + \frac{1}{\omega_H}\left[\vec{v} \times \vec{h}(\vec{r})\right] \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \frac{1}{\omega_H}\left[\dot{\vec{v}} \times \vec{h}\right] + \frac{1}{\omega_H}\left[\vec{v} \times \dot{\vec{h}}\right] - \frac{\dot{\omega}_H}{\omega_H^2}\left[\vec{v} \times \vec{h}\right]}$$

$\Downarrow$ Подставляем $\quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \dfrac{q}{m}\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{\omega}_H],$

$\Downarrow$ $\quad \dot{\omega}_H = \dfrac{\partial \omega_H}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\,\omega_H, \quad \dot{\vec{h}} = \dfrac{\partial \vec{h}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{h}.$

$\Downarrow$ Разлагаем $\quad \vec{h}(\vec{r}),\ \omega_H(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r})$:

$\Downarrow$ $\quad \vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}(\vec{R}) + (\vec{\rho}\nabla)\,\vec{h}(\vec{R}) \quad$ и т. п.

$\Downarrow$ Получаем $\quad \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}(\underbrace{\vec{\rho},\ \vec{v},}_{\text{осциллируют с } \omega_H}\ \underbrace{\vec{E}(\vec{R}),\ \vec{B}(\vec{R}), \ldots}_{\text{меняются медленно}}).$

$\Downarrow$

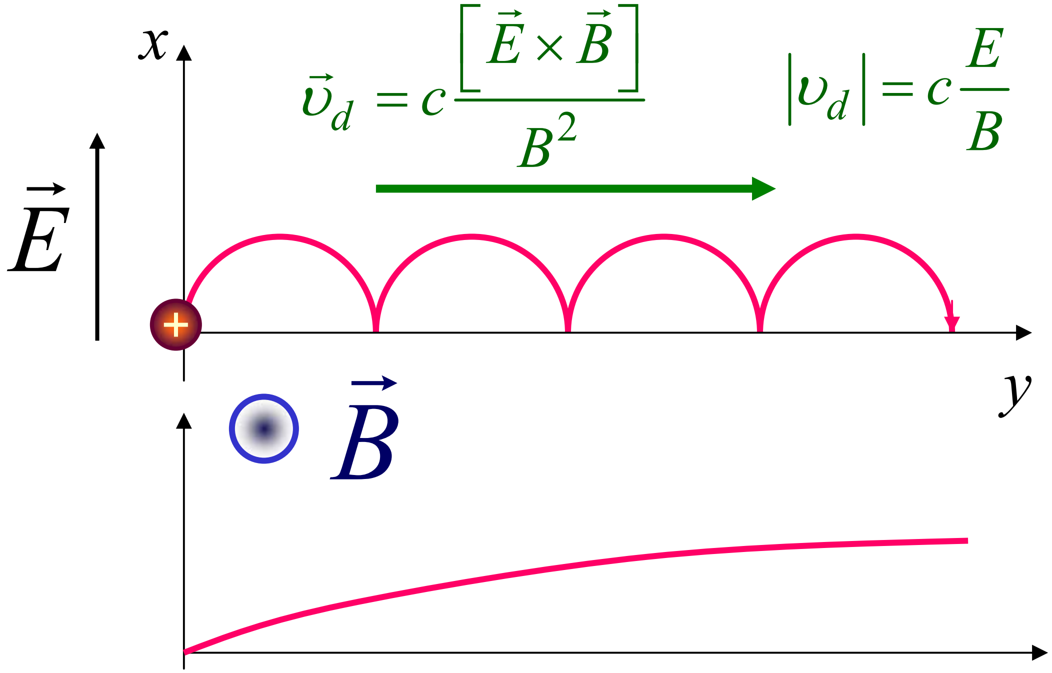
$\Downarrow$ Усредняем:

$$\boxed{\dot{\vec{R}} = \underbrace{v_\parallel \vec{h}}_{\text{движение вдоль силовой линии}} + \underbrace{\frac{c}{B^2}\left[\vec{E} \times \vec{B}\right]}_{\text{электрический дрейф}} + \underbrace{\frac{v_\parallel^2}{\omega_H}\left[\vec{h} \times \vec{æ}\right]}_{\text{центробежный дрейф}} + \underbrace{\frac{v_\perp^2}{2\omega_H B}\left[\vec{h} \times \nabla B\right]}_{\text{градиентный дрейф}}}$$

Магнитное и электрическое поле

Скрещенное электрическое и магнитное поле

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} + \left[\vec{\upsilon} \times \vec{\omega}_H\right]$$



«быстрое» включение

$\omega_H \tau << 1$

«медленное» включение

$\omega_H \tau >> 1$

Дрейфовая скорость не зависит от заряда и массы частицы

Понятие дрейфового движения

Скрещенное электрическое и магнитное поле

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E} + \left[\vec{\upsilon} \times \vec{\omega}_H\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\upsilon_d\right| = c\frac{E}{B}$$

Стандартная механика Ньютона: ускорение частицы постоянно, направление ускорения совпадает с направлением вектора силы

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

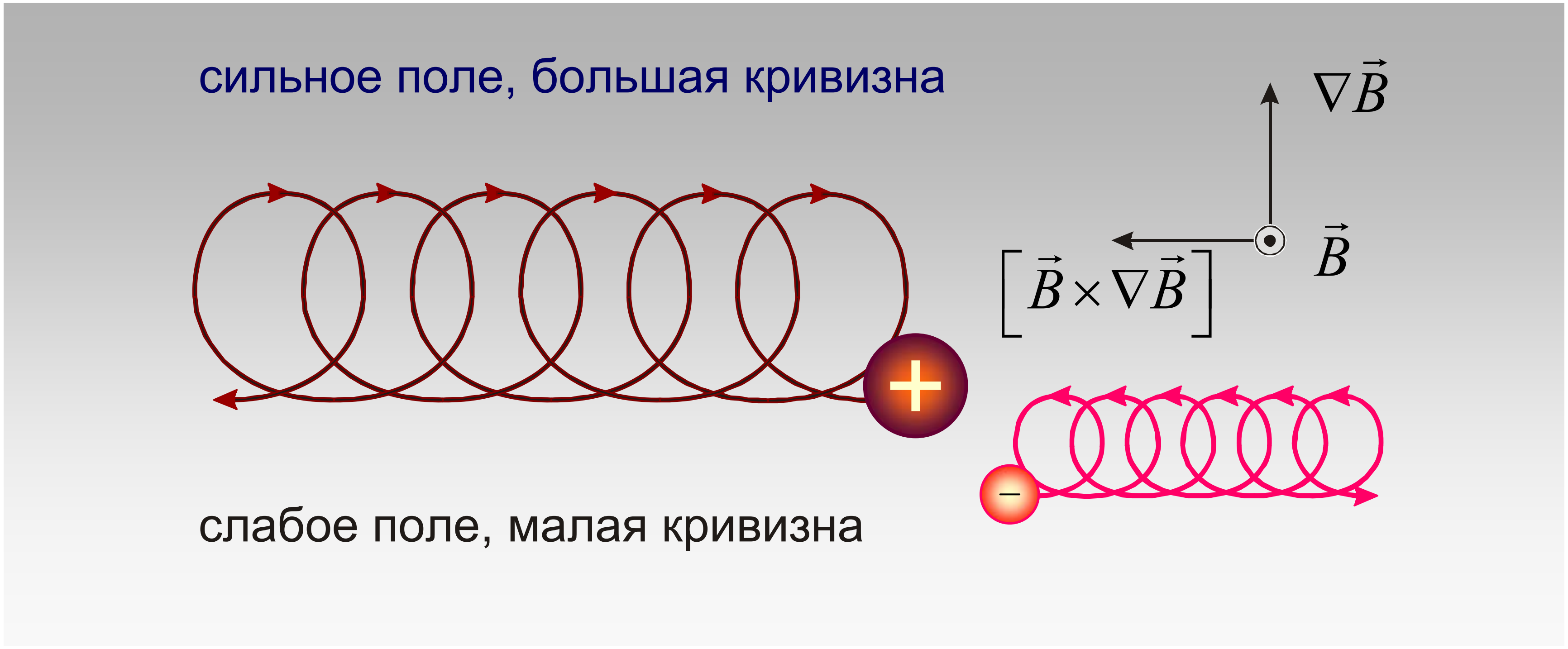
Дрейфовое движение: в магнитном поле скорость дрейфа частицы постоянна и перпендикулярна направлению приложенной силы

$$\boxed{\left|\upsilon_d\right| = const \cdot \left|F\right|}$$

NB: вместо электрической в этом рассмотрении может быть другая сила

Градиентный дрейф

пусть магнитное поле неоднородно в пространстве (есть градиент)
рассматриваем компоненту скорости, перпендикулярную к магнитному полю



$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\upsilon_\perp^2}{2\omega_H B}\left[\vec{h}\times\nabla\vec{B}\right] = \frac{\upsilon_\perp^2}{2\omega_H}\frac{\left[\vec{B}\times\nabla\vec{B}\right]}{B^2}}$$

<u>Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны</u>

Вектор кривизны силовой линии

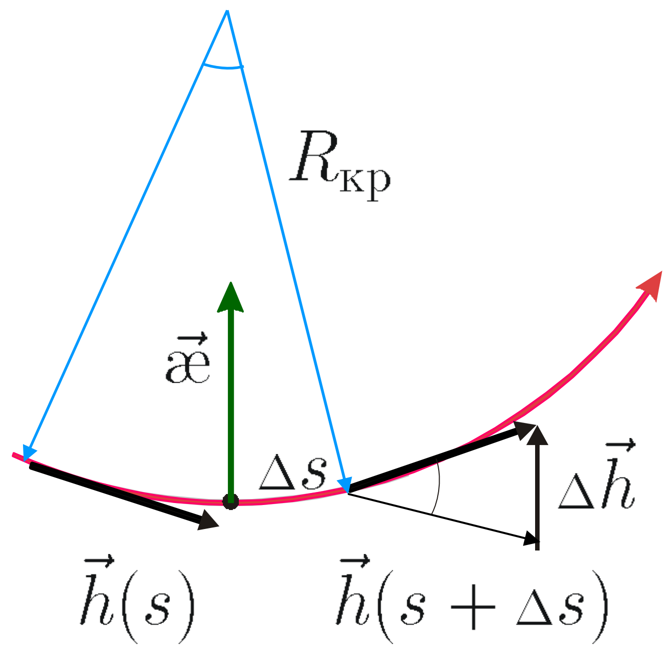
пусть магнитное поле неоднородно в пространстве (есть градиент)
рассматриваем продольную компоненту скорости

<ins>вектор кривизны силовых линий</ins>

$$\vec{æ} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{h}\nabla)\vec{h} = \underbrace{\frac{\partial \vec{h}}{\partial s}}$$

производная вдоль силовой линии

$\vec{h}$ *- единичный вектор магнитного поля*



Так как $\dfrac{\Delta h}{h} = \dfrac{\Delta s}{R_{\text{кр}}}, \quad \vec{æ} = \dfrac{\Delta \vec{h}}{\Delta s},$

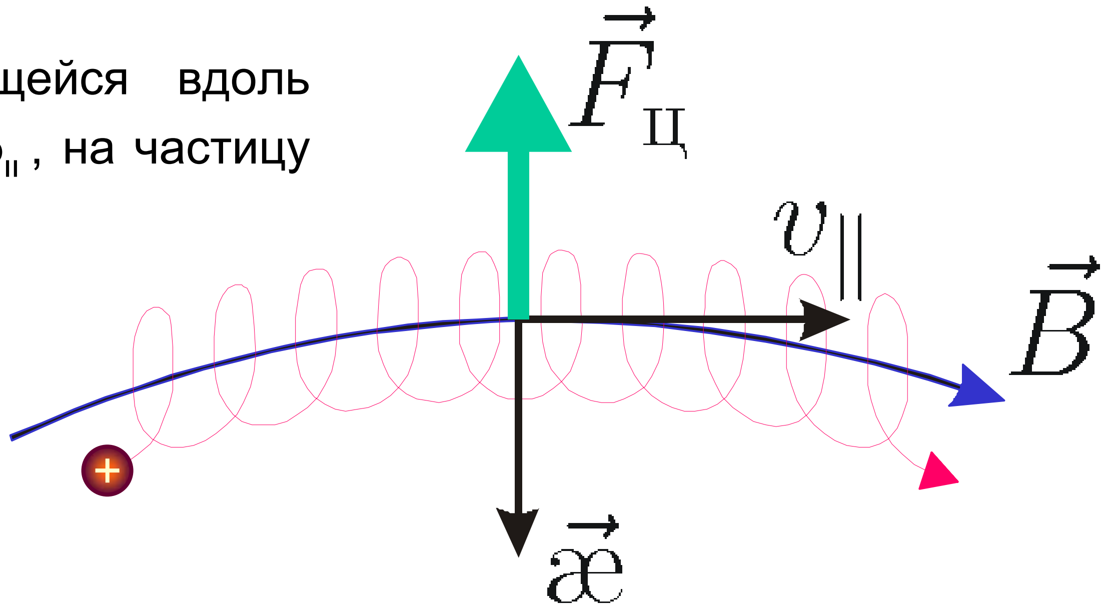
То $|æ| = \dfrac{\Delta h}{\Delta s} = \dfrac{1}{R_{\text{кр}}}.$

радиус кривизны силовой линии

Центробежный дрейф

пусть магнитное поле неоднородно в пространстве (есть градиент)
рассматриваем продольную компоненту скорости

В системе отсчёта, движущейся вдоль силовой линии со скоростью $\upsilon_{\parallel}$, на частицу действует центробежная сила



$$F_ц = \frac{m\upsilon_{\parallel}^2}{R_{кр}}; \qquad \vec{F}_ц = m\upsilon_{\parallel}^2 \vec{æ}$$

$F_ц$ эквивалентна электрическому полю $\vec{E}_{экв} = \vec{F}_ц / q$

Дрейф: $$\vec{v} = \frac{c}{B^2}\left[\vec{E}_{\text{экв}} \times \vec{B}\right] = \frac{mv_{\parallel}^2 c}{qB^2}\left[\vec{B} \times \vec{æ}\right]$$

<u>Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны</u>

Магнитный момент частицы

Аналогично выводу дрейфовых уравнений можно преобразовать уравнения

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \dot{\vec{v}}\vec{h} + \vec{v}\dot{\vec{h}}, \qquad \frac{dv^2}{dt} = 2\vec{v}\dot{\vec{v}}$$

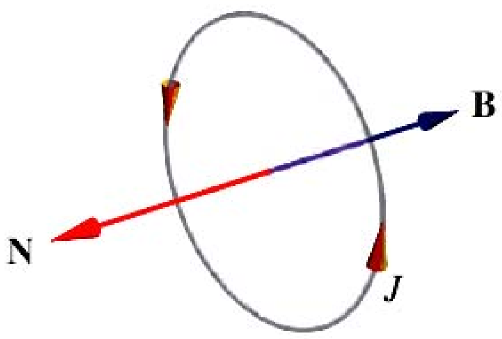
и получить сохранение магнитного момента частицы в магнитном поле:

$$\boxed{\mu = \frac{m\upsilon_{\perp}^2}{2B} = const}$$

и уравнение, описывающее работу электрического и вихревого магнитного поля:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \vec{E}\dot{\vec{R}} + \mu\frac{\partial B}{\partial t}}$$

Магнитный момент частицы



Движение частицы по окружности в магнитном поле можно представить как элементарный виток с током.

Такой элементарный ток будет производить магнитное поле, эквивалентное полю магнитного диполя.

Поэтому вводим дипольный момент частицы:

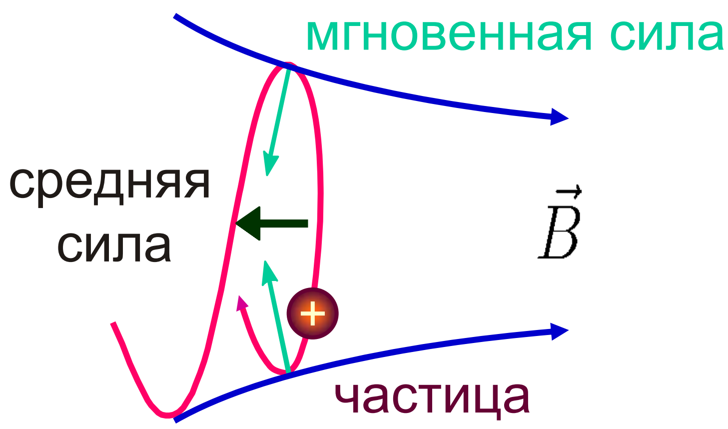
$$\vec{\mu} = \frac{JS}{c}\vec{h} = -\frac{JS}{c}\frac{\vec{B}}{|B|}$$, где $$J = \frac{q\omega_H}{2\pi}$$

$$\vec{\mu} = -\frac{m\upsilon_\perp^2}{2B}\vec{h}$$

поле внутри элементарного контура уменьшается всегда!

В магнитном поле, которое медленно изменяется в пространстве, магнитный момент частицы является адиабатическим инвариантом!

Движение в неоднородном магнитном поле



Инварианты движения:

энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} = const$$

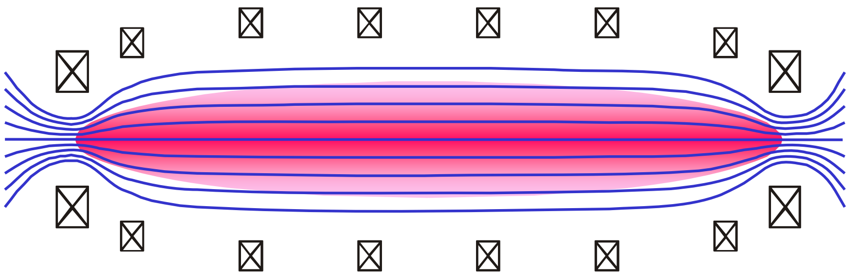
магнитный момент

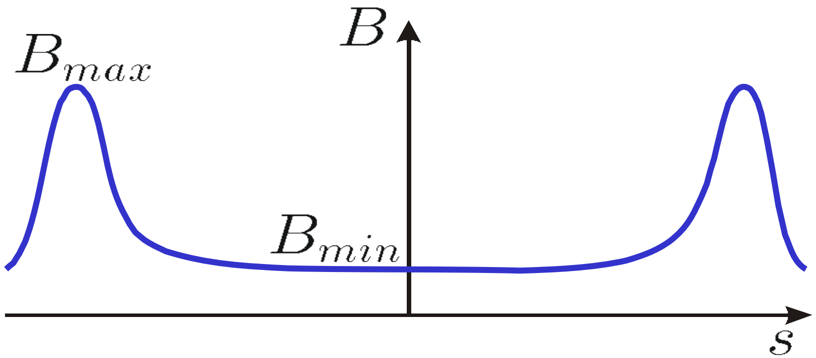
$$\mu = \frac{m\upsilon_\perp^2}{2B} = const$$

Поскольку $\varepsilon = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{m\upsilon_\parallel^2}{2} + \dfrac{m\upsilon_\perp^2}{2} = \dfrac{m\upsilon_\parallel^2}{2} + \mu B$ и $\upsilon_\parallel^2 > 0$

то в область $B > \varepsilon/\mu$ частица зайти не может ! $\Leftrightarrow$ $\dfrac{m\upsilon_\parallel^2}{2} = \varepsilon - \mu B \geq 0$

Пробкотрон Будкера-Поста (начало 1950х)





частица удерживается в пробкотроне, если

$$\frac{\upsilon_\perp^2(\vec{r})}{\upsilon^2(\vec{r})} > \frac{B(\vec{r})}{B_{\max}}$$

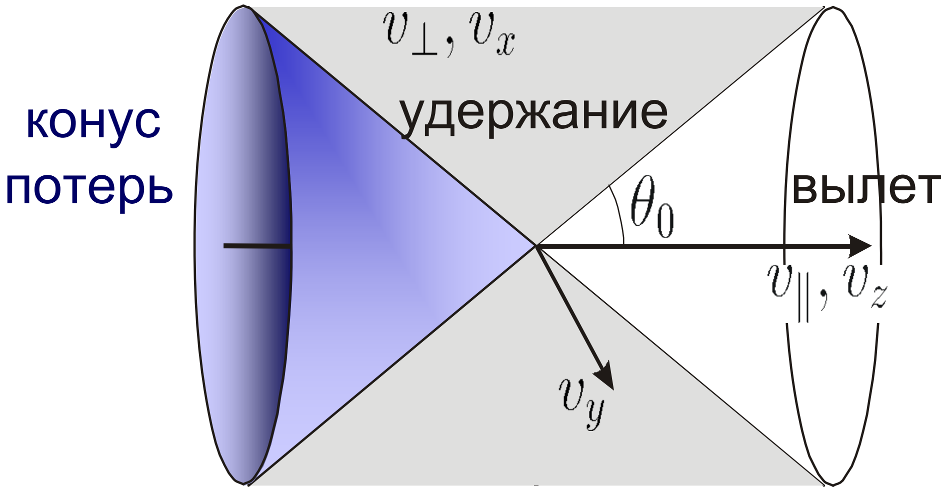
частицы с $\varepsilon/\mu > B_{\max}$ в пробкотроне Будкера-Поста не удерживаются !

Эксперимент Родионова, 1958 г.: частицы живут более 10^8 отражений!

Удержание частиц в пробкотроне

Если частица стартует из области минимума поля под углом θ :

$$\sin\theta_0 = \frac{\upsilon_\perp}{\upsilon} = \sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}} = R^{-1/2}$$



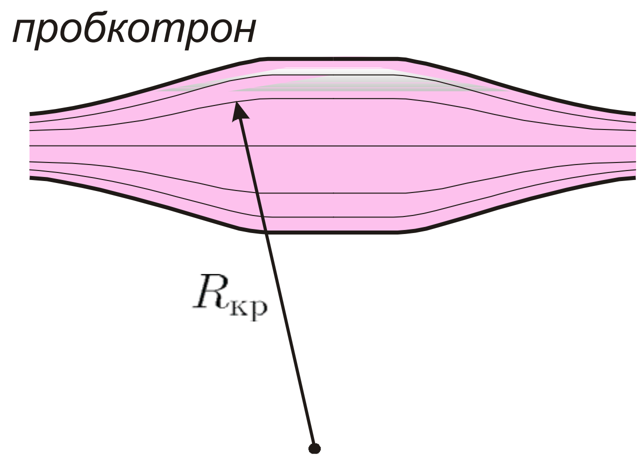
пробочное отношение

$$\boxed{R \equiv B_{\max} / B_{\min}}$$

Будет ли частица удерживаться, зависит только от угла между вектором скорости и вектором магнитного поля, но не от энергии частицы!

Движение частиц в пробкотроне

$$\dot{\vec{R}} = \underbrace{v_{\parallel}\vec{h}}_{\text{движение вдоль силовой линии}} + \underbrace{\frac{c}{B^2}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]}_{\text{электрический дрейф}} + \underbrace{\frac{v_{\parallel}^2}{\omega_H}\left[\vec{h}\times\vec{æ}\right]}_{\text{центробежный дрейф}} + \underbrace{\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_H B}\left[\vec{h}\times\nabla B\right]}_{\text{градиентный дрейф}}$$



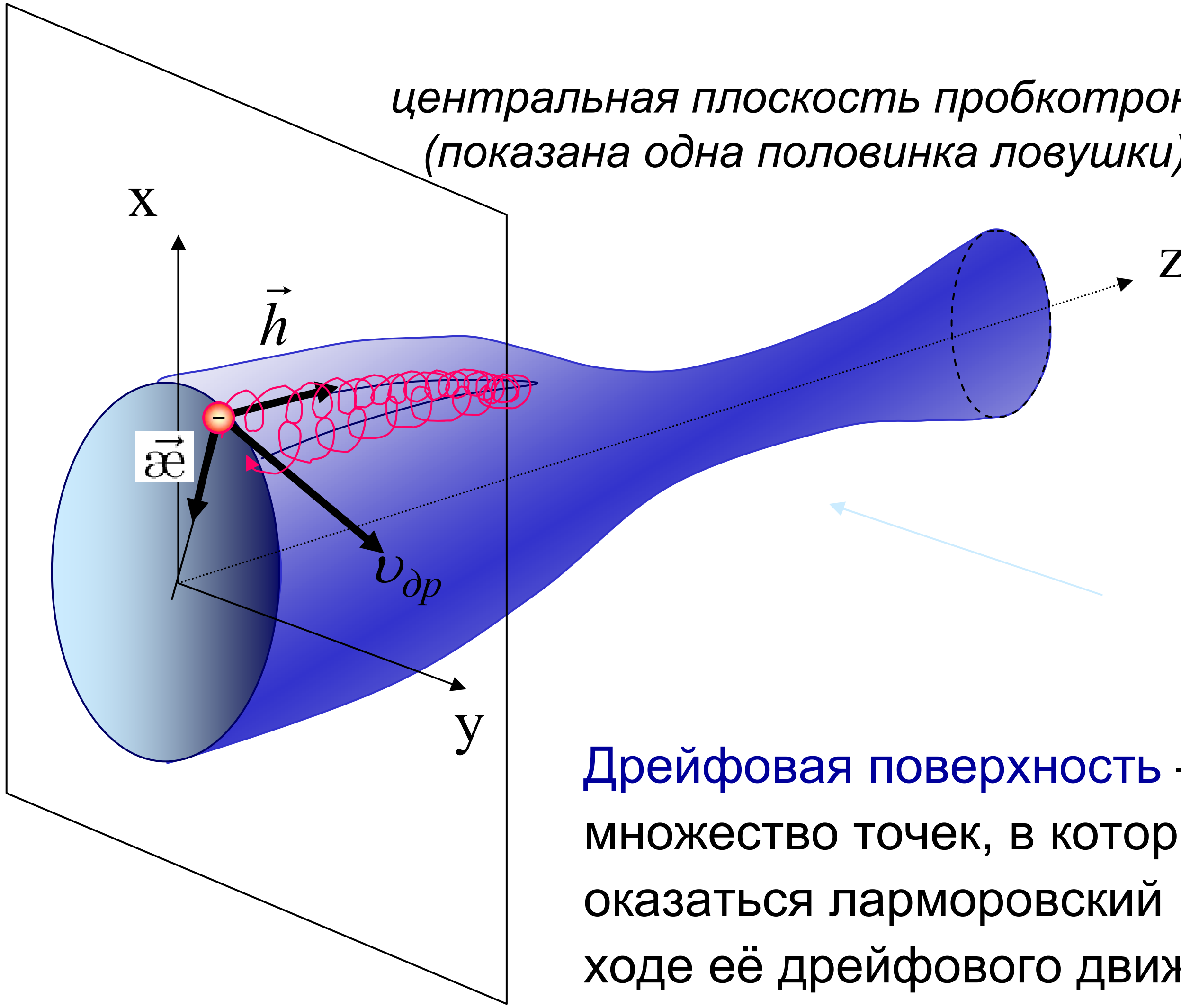
оба «магнитных» дрейфа (градиентный и центробежный) направлены по бинормали к силовой линии

$$\vec{v}_{\text{др}} = \frac{v_{\parallel}^2 + (v_{\perp}^2/2)}{\omega_H}\left[\vec{h}\times\vec{æ}\right]$$

Понятие дрейфовой поверхности

Частица быстро осциллирует между пробками
и медленно дрейфует в азимутальном направлении

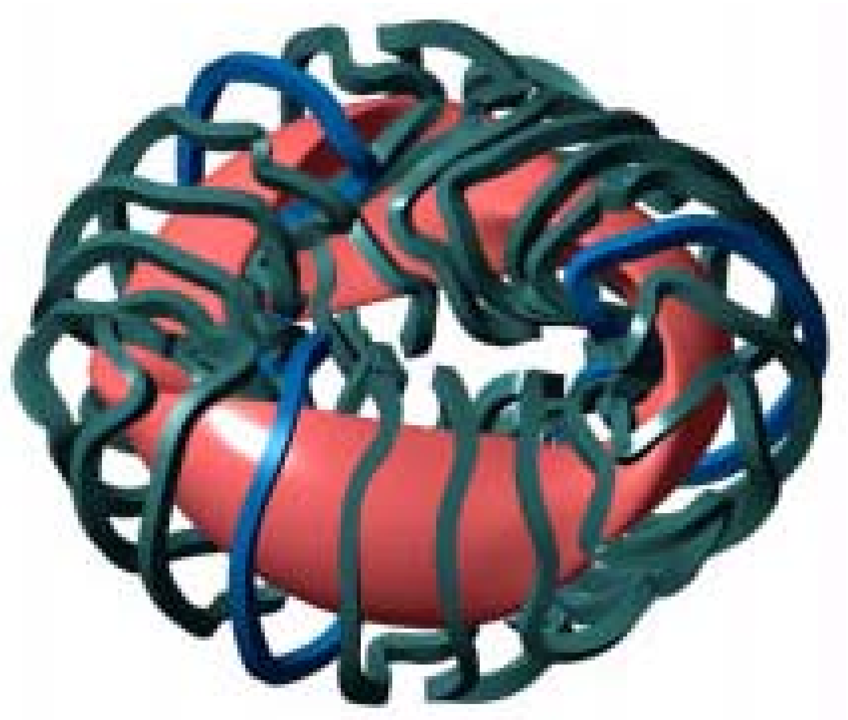
центральная плоскость пробкотрона
(показана одна половинка ловушки)



Дрейфовая поверхность – геометрическое множество точек, в которых может оказаться ларморовский центр частицы в ходе её дрейфового движения.

Пример сложной дрейфовой поверхности

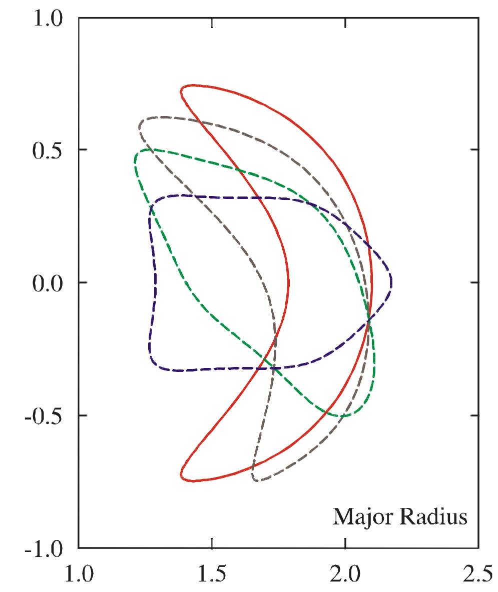
Проект стелларатора NCSX (Принстон, США)



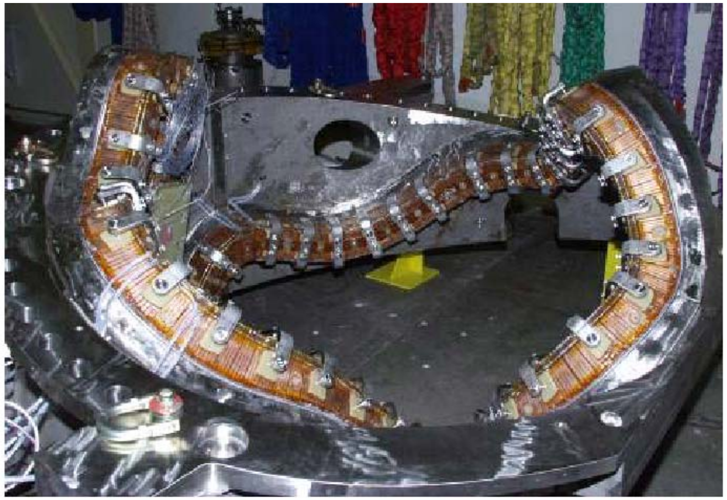
красным – плазма

синим и зелёным – катушки магнитного поля

разные сечения плазменного шнура

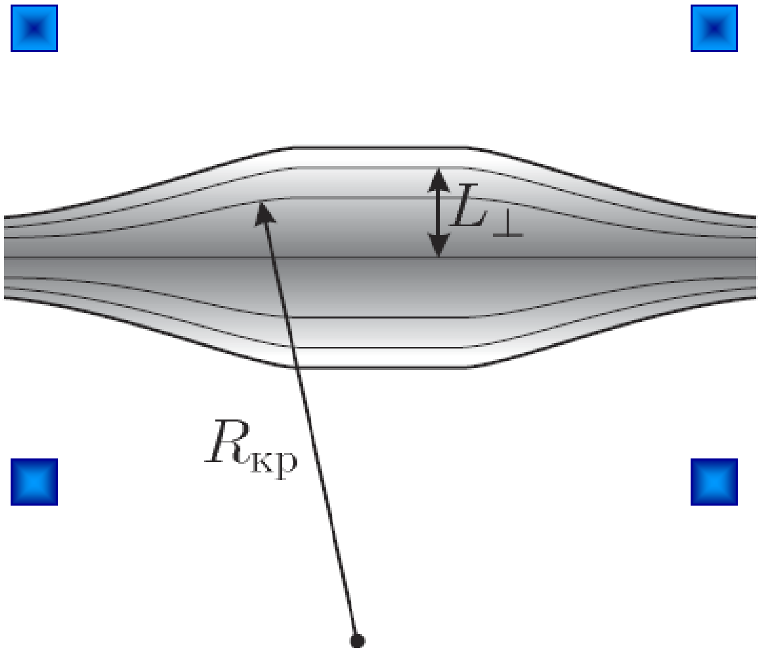


Прототип одной из катушек модульной магнитной системы. *Точность магнитного поля – не хуже 10^{-4} !*

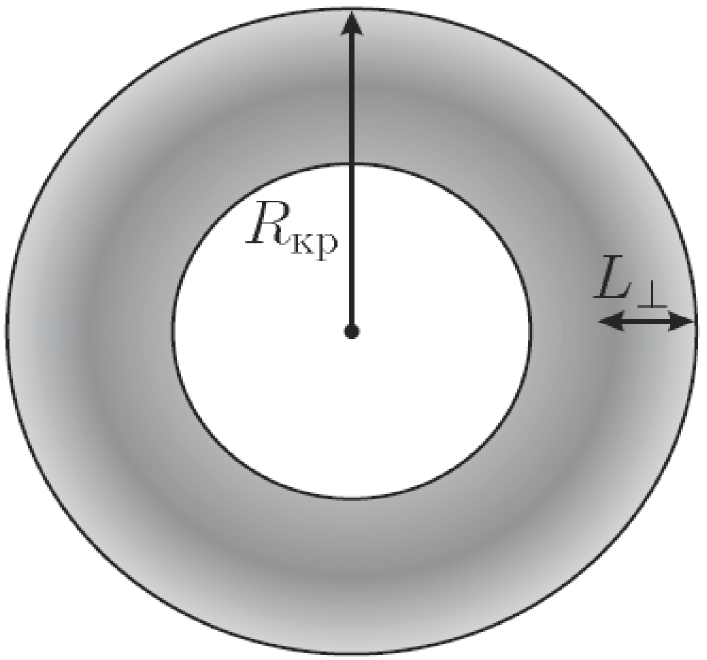


Линейные и тороидальные конфигурации

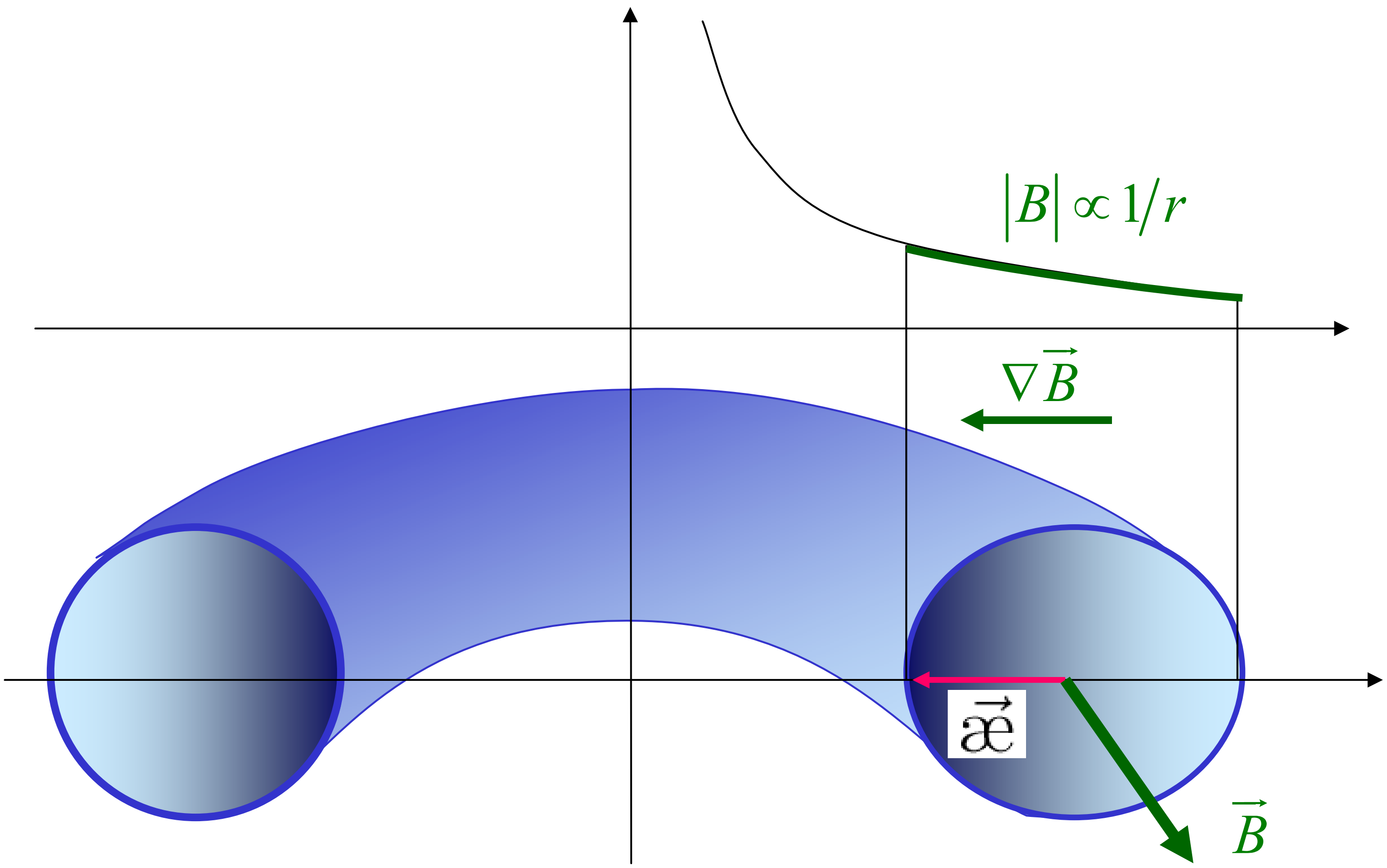
пробкотрон Будкера-Поста
(простейшая открытая ловушка)



тороидальная система
(отсутствуют потери частиц
и энергии через торцы)

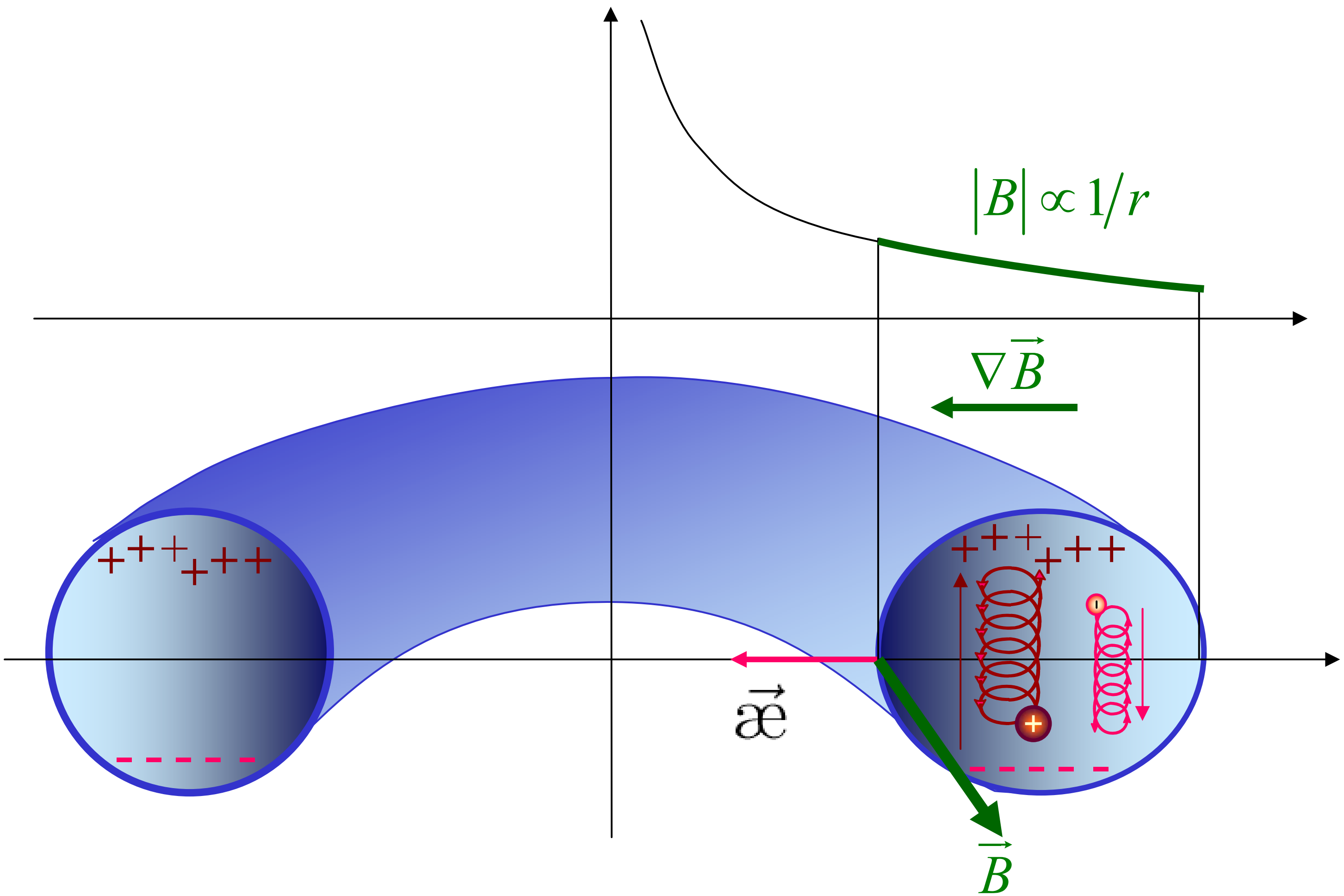


Магнитное поле тороида



Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны

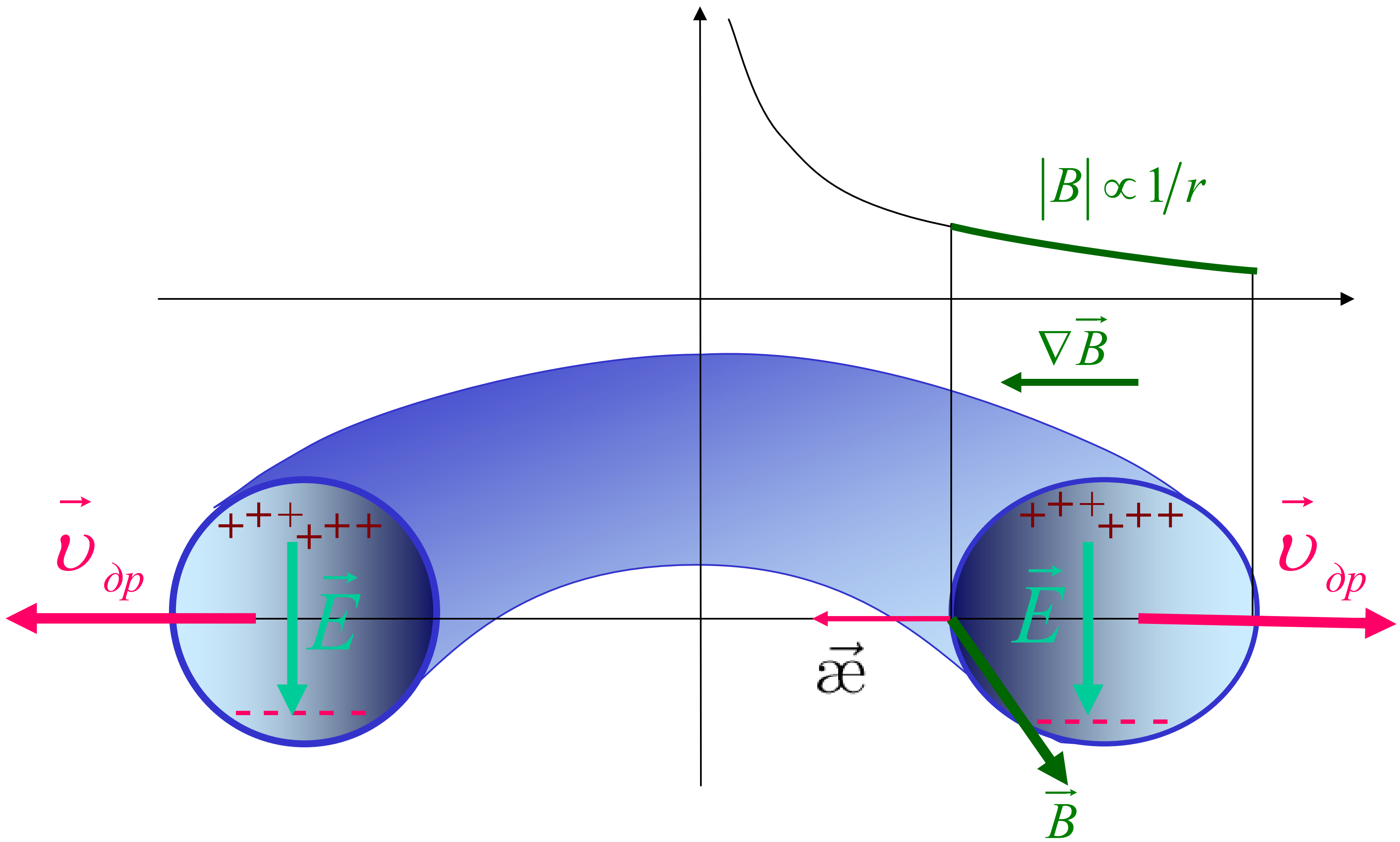
Поляризация плазмы



Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны

$\Rightarrow$ поляризация плазмы

Появление радиального дрейфа



<u>Электроны и ионы дрейфуют в разные стороны</u>

$\Rightarrow$ поляризация плазмы $\Rightarrow$ дрейф в скрещенных полях наружу

$\Rightarrow$ в простом тороидальном поле плазму удержать нельзя !

Как бороться с дрейфом наружу?

В «простом» тороидальном магнитном поле плазму удержать нельзя из-за возникающей поляризации и дрейфа плазмы наружу

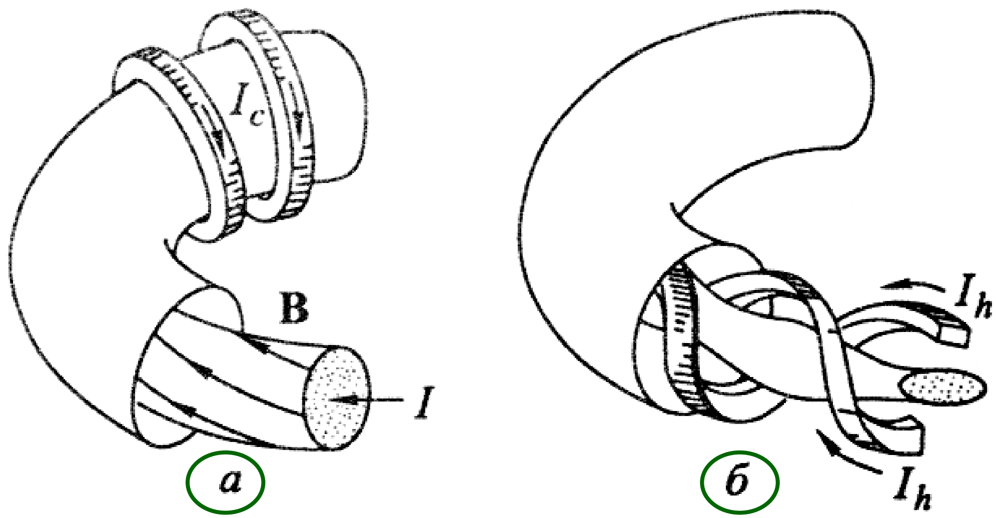
Выход: сделать так, чтобы понятия «верх» и «низ» отсутствовали !

нужно создать дополнительное магнитное поле, которое «перепутает» верх и низ

Два подхода к получению полоидального поля

а - создается током, текущим по плазме (**токамак**)

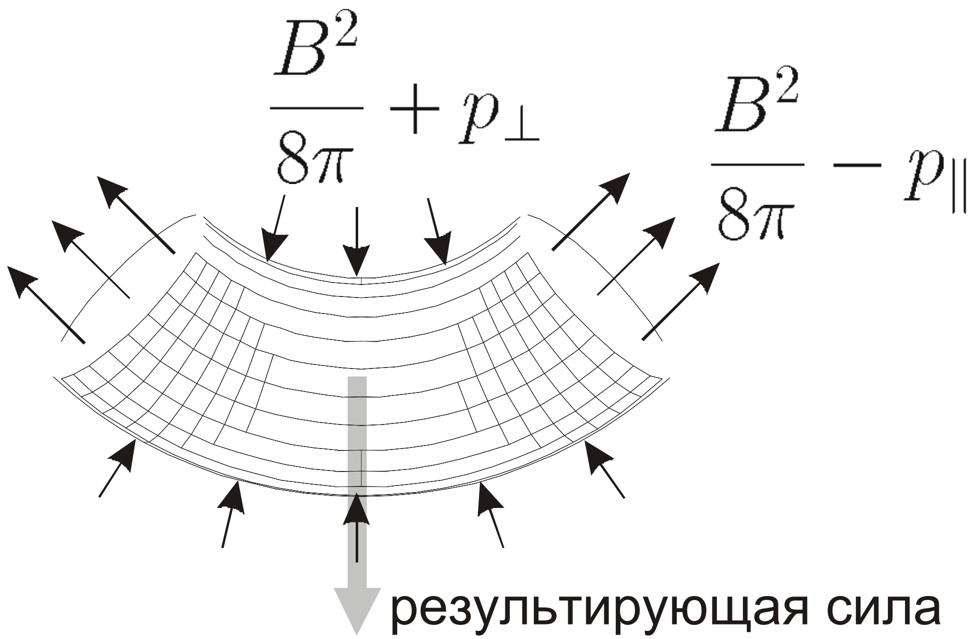
б - создается внешними обмотками (**стелларатор**)



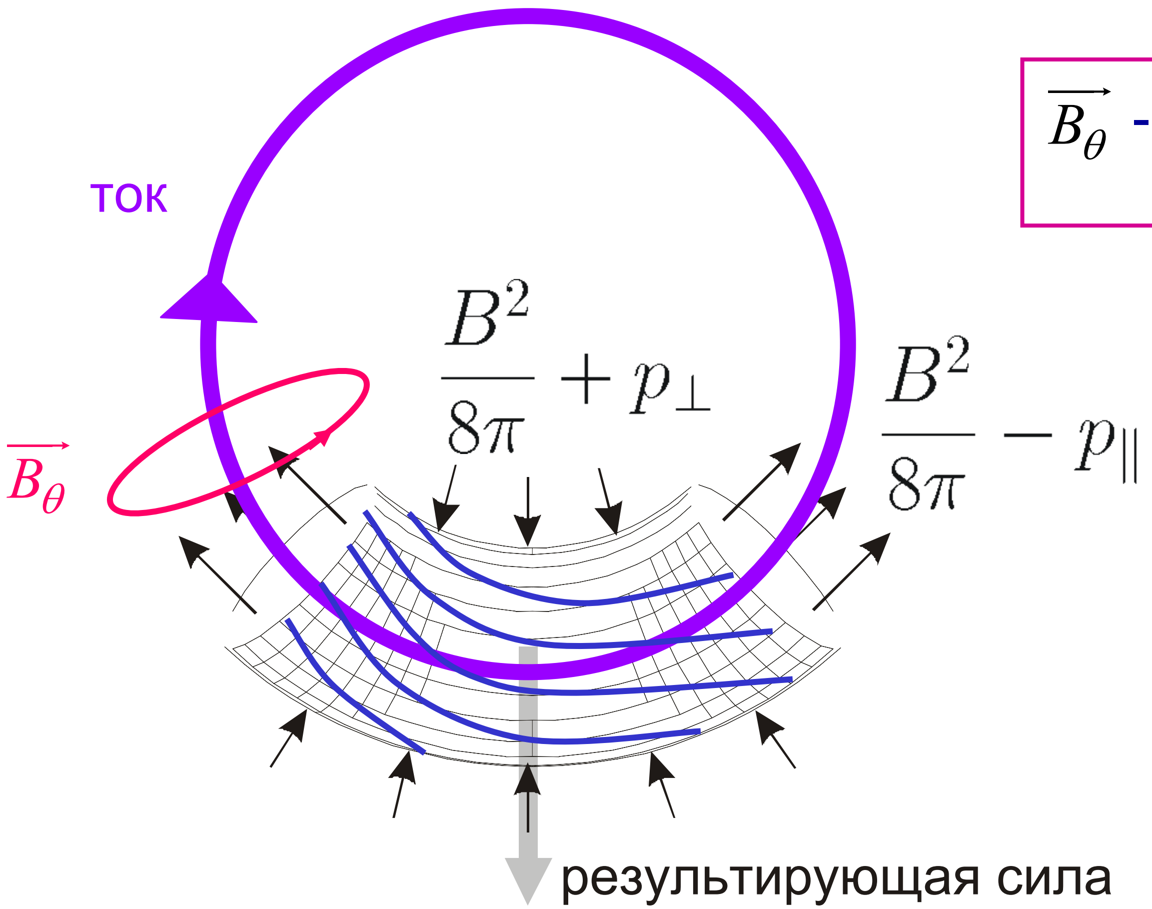
В целом за один оборот вокруг малого радиуса дрейф частиц зануляется. Эффективно наличие дрейфа приводит к тому, что траектория частиц несколько смещается относительно магнитной поверхности

Тороид с плазмой с точки зрения МГД

Плазменный ток сам по себе не обеспечивает равновесия плазмы



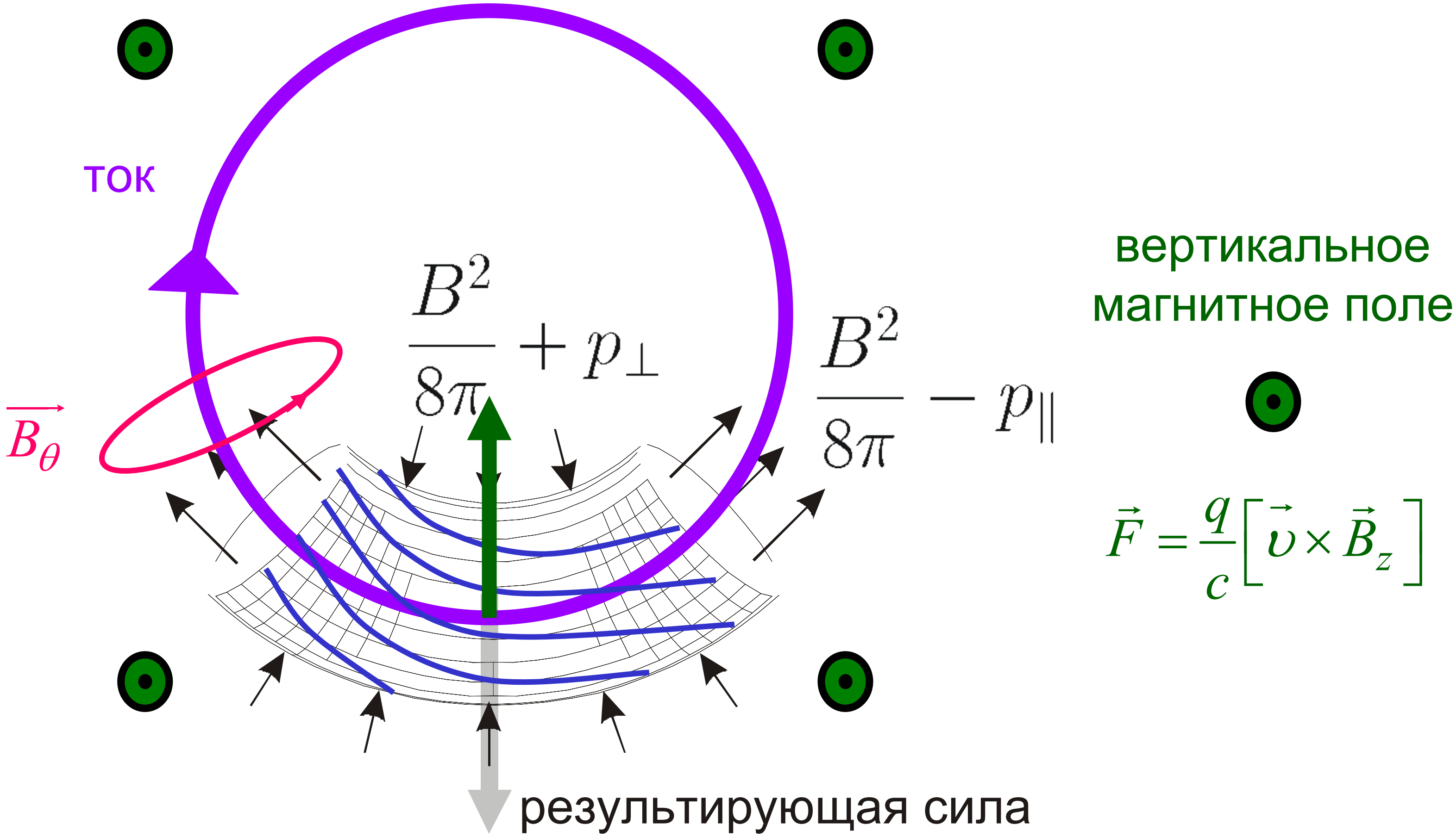
Вводим магнитное поле плазменного тока



$\overrightarrow{B_\theta}$ - полоидальное магнитное поле

Если пропускать ток по плазме, то результирующее магнитное поле будет винтовым (синие линии на рисунке), причём шаг винта будет зависеть от распределения плотности тока по сечению плазменного шнура.

Добавляем вертикальное магнитное поле

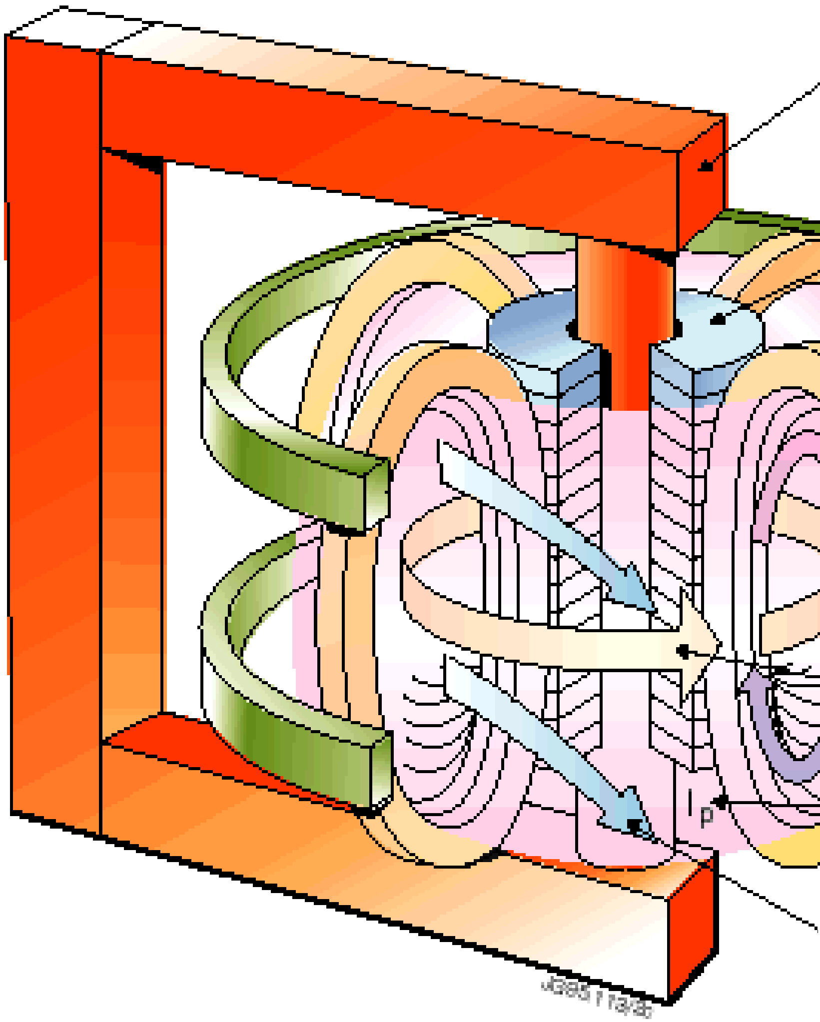


В дополнительном поле B_z появляется сила, уравновешивающая плазменный виток.

= Токамак

И. Е. Тамм, А. Д. Сахаров, 1950

Основные части токамака



Магнитопровод (железное ярмо)

Индуктор (первичная обмотка трансформатора)

Катушки тороидального поля

Катушки вертикального поля (положение и форма плазмы) (*)

Полоидальное поле тока

Тороидальное поле

Плазма с током I_p (вторичная обмотка тр-ра)

Результирующее магнитное поле *(наклон к оси преувеличен)*

= Токамак

(*) *всегда используется точное название «катушки полоидального поля», но тут для понимания функции лучше так*

Конец темы 8

Движение частиц в магнитном поле. Циклотронный резонанс. Дрейфовое движение. Электрический, центробежный и градиентный дрейф. Адиабатические инварианты. Пробкотрон Будкера-Поста. Движение заряженной частицы в пробкотроне. Дрейфовое движение в тороиде. Устройство токамака.